Zusammenfassung Geometrie – Seite 1:

Punkte: $A(a_1 | a_2 | a_3), B(b_1 | b_2 | b_3)$ **Vektor:** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Länge (Betrag) des Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ *(Satz des Pythagoras)*

Gerade: Parameterform: $g: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{m}}_{\text{Richtungsvektor}}, \ t \in \mathbb{R}$

Ebene:

(1) Parameterform: $E: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{s}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{u}}_{\text{Spannvektor 1}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{Spannvektor 2}}, \ s,t \in \mathbb{R}$

(2) Koordinatenform: $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$

(3) Normalenform: $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ zu (2), (3): Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$

(4) Hesse'sche Normalenform (HNF): $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$ mit Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$

bzw. HNF: $E: \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

Untersuchung der **Lage zweier Geraden:** $g_1: \vec{x} = \overrightarrow{p_1} + s \cdot \overrightarrow{m_1}$, $g_2: \vec{x} = \overrightarrow{p_2} + t \cdot \overrightarrow{m_2}$

(1) $\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}$ linear abhängig? (Gibt es ein k, so dass $\overrightarrow{m_1} = k \cdot \overrightarrow{m_2}$?)

(2a) Falls JA bei (1): Prüfe, ob P_1 auf g_2 liegt. (Punktprobe: $p_1 = \overrightarrow{p_2} + t \cdot \overrightarrow{m_2}$)
Wenn t immer gleich: **identisch** Wenn t unterschiedlich: **parallel**

(2b) Falls NEIN bei (1): Geraden gleichsetzen, mit (I) und (II) s und t bestimmen.
Dann s und t in (III) einsetzen:
Wenn wahre Aussage: **Schnittpunkt** Wenn Widerspruch: **windschief**

Untersuchung der **Lage von Gerade und Ebene:** $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{m}$, $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$

Gerade in Ebene (in Koordinatenform) einsetzen und nach t auflösen:
Wenn $0t = 0$ **g liegt in E**
Wenn $0t \neq 0$ **g liegt parallel zu E**
Wenn t eine Zahl: **Schnittpunkt** (Einsetzen von t in Gerade liefert Schnittpunkt)

Untersuchung der **Lage zweier Ebenen:** $E_1: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$, $E_1: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = c$

Eliminiere wenn nötig x_1, x_2 oder x_3 z. B. durch Subtrahieren der beiden Ebenengleichungen in Koordinatenform.
Wähle dann z.B. $x_1 = t$ und bestimme x_2 und x_3 und stelle daraus **Schnittgerade** auf.

Spezialfälle:
Wenn nach dem Verrechnen der Ebenen die Gleichung
(1) $0 = 0$ lautet: **Ebenen identisch**
(2) $0 = e$ mit $e \neq 0$ lautet: **Ebenen sind parallel**

Zusammenfassung Geometrie – Seite 2:

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ oder $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ *(Das Ergebnis ist eine **Zahl**)*

Eigenschaft: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

Vektorprodukt: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=\vec{v}$ *(Das Ergebnis ist ein **Vektor**)*

Eigenschaft: $\vec{a}\perp\vec{v}$ und $\vec{b}\perp\vec{v}$

Schnittwinkel α mit $0\le\alpha\le 90$:

Gerade – Gerade:	Gerade – Ebene:	Ebene – Ebene:
$\cos(\alpha)=\frac{\lvert\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2\rvert}{\lvert\vec{m}_1\rvert\cdot\lvert\vec{m}_2\rvert}$	$\sin(\alpha)=\frac{\lvert\vec{m}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{m}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$	$\cos(\alpha)=\frac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}$

Spiegelungen:

Spiegele	Punkt A	Gerade g	Ebene E
an Punkt S	**(I)** Allgemein: $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AS}$ Beispiel: $\begin{array}{ccccccccccc} A & (& 2 & & \vert & 1 & & \vert & 1 & &) \\ & & \downarrow & +2 & & \downarrow & -1 & & \downarrow & +4 & \\ S & (& 4 & & \vert & 0 & & \vert & 5 & &) \\ & & \downarrow & +2 & & \downarrow & -1 & & \downarrow & +4 & \\ A' & (& 6 & & \vert & -1 & & \vert & 9 & &) \end{array}$	Analog zu **(I)** für zwei Punkte von g.	Analog zu **(I)** für drei Punkte von E.
an Gerade h	**(II)** (1) Hilfs**ebene** E senkrecht zu h durch A aufstellen. (2) Schnittpunkt S von h und E bestimmen. (3) A an S spiegeln.	Analog zu **(II)** für zwei Punkte von g.	Analog zu **(II)** für drei Punkte von E.
an Ebene F	**(III)** (1) Lot**gerade** g senkrecht zu F durch A aufstellen. (2) Schnittpunkt S von g und E bestimmen. (3) A an S spiegeln.	Analog zu **(III)** für zwei Punkte von g.	Analog zu **(III)** für drei Punkte von E.

Zusammenfassung Geometrie – Seite 3:

Abstand: Punkt – Gerade – Ebene

	Punkt *B*	**Gerade *g***	**Ebene *E***
Punkt *A*	$d=\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{\left(b_1-a_1\right)^2+\left(b_2-a_2\right)^2+\left(b_3-a_3\right)^2}$	(1) Stelle die zu g orthogonale Ebene durch A auf: $E:(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$, wobei $\vec{n}=\overrightarrow{m_g}$ (2) Bestimme den Schnittpunkt L von g und E (3) Berechne den Abstand $d=\left\lvert\overrightarrow{AL}\right\rvert$	$d=\left\lvert\frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right\rvert$ wobei $E:n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=b$
Gerade *h*		Fall 1: Windschiefe Geraden $d=\left\lvert\left(\vec{q}-\vec{p}\right)\cdot\overrightarrow{n_0}\right\rvert$ wobei $g:\vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$, $h:\vec{x}=\vec{q}+s\cdot\vec{v}$ und $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ und $\overrightarrow{n_0}=\frac{1}{\lvert\vec{n}\rvert}\vec{n}$ Fall 2: Parallele Geraden (1) Wähle $A\in h$ (2) Berechne Abstand von A zu g	Nur wenn $h\parallel E$: (1) Wähle $A\in h$ (2) Berechne Abstand von A zu E
Ebene *F*			Nur wenn $E\parallel F$: (1) Wähle $A\in F$ (2) Berechne Abstand von A zu E